

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A IX A

1. Trei elevi E1, E2 și E3 își aleg, în aceasta ordine numerele reale x, y și z , astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:
 - a) x, y și z , să fie în progresie geometrică, în această ordine;
 - b) $x, 1+y, z$, să fie în progresie aritmetică, în această ordine;
 - c) $x, 1+y, 2+z$, să fie în progresie geometrică, în această ordine;
 - 1⁰. Să se determine numerele reale x, y, z .
 - 2⁰. Care sunt aceste progresii și rațiile lor ?
2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A , având catetele de lungimi $AB = c$, $AC = b$ și ipotenuza $BC = a, b > c$. Dacă $M, P, N \in (BC)$ sunt picioarele înălțimii, bisectoarei respectiv medianei din vârful A , demonstrați că:
 - a) $a^2 \geq 2bc$;
 - b) $\overrightarrow{BM} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{BP} = \frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{BC}$;
 - c) $\overrightarrow{MP} = \frac{bc(b-c)}{a^2(b+c)} \cdot \overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{PN} = \frac{a^2}{2bc} \cdot \overrightarrow{MP}$.
3. Se dă mulțimea finită $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n / n \geq 3\} \subset N^*$. Se face o partiție a acestei mulțimi în două submulțimi ($M = M_1 \cup M_2$) astfel încât prima submulțime să conțină două dintre elementele mulțimii M , iar cealaltă pe cele $(n-2)$ rămase. Mulțimea M se numește **“articulată”** dacă produsul numerelor din prima submulțime este egal cu suma numerelor din cea de-a doua. Demonstrați că:
 - a) Mulțimea $A = \{2, 3, 6\}$ este **“articulată”**;
 - b) Mulțimea $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ este **“articulată”**;
 - c) Mulțimea $C = \{1, 2, 3, \dots, 13\}$ nu este **“articulată”**.
4. O foaie de hârtie a fost ruptă în 4 sau 7 bucăți. Se iau câteva dintre aceste bucăți și se rup, fiecare, în câte 4 sau 7 bucăți. Continuând procedeul de câteva ori, Andrei și Bogdan au numărat la final 2010, respectiv 2011 bucăți de hârtie. Cine poate avea dreptate, Andrei sau Bogdan?

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A X A

1. Demonstrați că:

a) $\frac{x^2}{3} \geq 2x - 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, pentru orice $x, y \in (0, \infty)$;

c) $\log_a 3 + \log_b 3 \geq 4 \log_{ab} 3$ pentru orice $a, b \in (1, +\infty)$

d) Determinați numerele $a, b \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, dacă $ab = 9$ și $\log_a (2a - 3) + \log_b (2b - 3) \geq \log_a 3 + \log_b 3$

2. La un concurs de atletism participă liceele A, B, C, fiecare liceu cu câte 3 elevi. Punctajul final al fiecărui liceu se calculează adunând punctele obținute de elevii liceului respectiv. Elevului sosit pe locul k ($k = \overline{1, 9}$) i se acordă $\frac{10}{k}$ puncte. Juriul concursului a constatat următoarele

condiții îndeplinite simultan:

a) Oricare doi elevi nu au sosit în același timp;

b) Primele trei locuri au fost ocupate de elevi de la licee diferite;

c) Elevii liceului C au sosit unul după altul;

d) Fiecare elev de la liceul B avea chiar în față sa un elev de la liceul A.

Care este clasamentul final al celor trei licee în funcție de punctajul obținut de fiecare dintre ele?

3. Păcală produce vin de tărie $P\%$ și ar putea umple un butoi în P ore. Tândală produce vin de tărie $T\%$ și ar putea umple același butoi în T ore. Lucrând împreună ei umplu butoiul în 6 ore. Ce tărie va avea vinul obținut astfel ?

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ o funcție care verifică relația $f(x+y) \geq f(x) \cdot f(y) \geq 2^{x+y}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $f(0) = 1$;

b) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI A

1. Se consideră numerele reale a, b, c , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 3$ și determinanții

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \text{ și } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}. \text{ Să se demonstreze că:}$$

a) $\Delta_1 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$;

b) $\Delta_1 = \Delta_2$;

c) Pentru oricare trei puncte distincte situate pe graficul funcției f și având coordonatele numere întregi, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil prin 3.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = a \cdot I_3 + b \cdot A + c \cdot A^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Calculați A^3 ;

b) Demonstrați că A este inversabilă și calculați A^{-1} ;

c) Demonstrați că $(a+b+c) \cdot \det B \geq 0$, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$, folosind, eventual, proprietățile determinanților pentru a calcula $\det B$.

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care pentru orice $x \in \mathbb{R}$ verifică $|\cos x - 2^x + f(x)| \leq x^2$.

Demonstrați că:

a) $f(0) = 0$;

b) f este continuă în $x = 0$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

4. Un călător parcurge dus-întors același traseu de lungime d în două zile, de fiecare dată în același interval orar, 8–12. În prima zi (la dus) o funcție continuă și monotonă $f: [8;12] \rightarrow [0;d]$ exprimă distanța parcursă de călător pe traseu iar în doua zi (la întors) o altă funcție continuă și monotonă $g: [8;12] \rightarrow [0;d]$ exprimă distanța parcursă de călător pe traseu în sens invers, până la fiecare moment orar $t \in [8;12]$ (în care fracțiunile de oră se exprimă zecimal). Considerăm funcția $F: [8;12] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) = f(t) + g(t) - d$.

a) Calculați $F(8)$ și $F(12)$.

b) Dacă $t_0 \in [8;12]$ și $F(t_0) = 0$, demonstrați că la momentul t_0 călătorul se află în același loc pe traseu atât la dus cât și la întors.

c) Demonstrați că există un punct pe traseul parcurs în care călătorul s-a aflat la aceeași oră atât la dus cât și la întors.

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

MaST Networking, calitate în dezvoltarea competențelor cheie de matematică, științe și tehnologii
IȘJ Călărași, IȘJ Cluj, IȘJ Iași, IȘJ Sibiu, IȘJ Mehedinți



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII A

1. Considerăm mulțimea $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}$
 - a) Demonstrați că G este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu înmulțirea numerelor reale și că (G, \circ) este grup.
 - b) Găsiți trei soluții ale ecuației $x^2 - 2y^2 = 1$ în mulțimea numerelor naturale nenule.
 - c) Demonstrați că ecuația $x^2 - 2y^2 = 1$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale.
2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$ și $F(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_1^x f(t) dt$
 - a) Să se demonstreze că F este monoton crescătoare.
 - b) Calculați $\int_0^1 xf(x) dx$.
 - c) Calculați $\int_0^1 F(x) dx$.
3. Considerăm polinomul $f = ax^4 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0$
 - a) Demonstrați că $f(x) - f(y)$ se divide cu $x - y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}, x \neq y$.
 - b) Demonstrați că, dacă $f(2) = 0$, atunci $f(5) \neq 7$.
 - c) Dacă $f(1) = 3$ și $f(2) = 5$, demonstrați că f nu are rădăcini întregi.
4. Într-un plan raportat la un sistem ortogonal de axe de coordonate (xOy) se deplasează o furnică inteligentă. Ea pleacă din $A(1,3)$ și merge până în $B(2,12)$ străbătând un drum ce reprezintă graficul unei funcții continue $f: [1,2] \rightarrow (0, \infty)$. Furnica constată că în orice punct $M(x,y)$ (situat pe graficul funcției) ar fi ea, diferența dintre $\frac{1}{3}$ din produsul coordonatelor punctului M și aria subgraficului funcției f pe $[1,x]$ este egală cu 1.
 - a) Demonstrați că $\frac{1}{3}xf(x) - \int_1^x f(t) dt = 1, x \in [1,2]$.
 - b) Demonstrați că f este derivabilă și că $xf'(x) = 2f(x), x \in [1,2]$
 - c) Determinați funcția f .

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.